

PRIMENA MATEMATIČKIH METODA I MODELA U EKONOMIJI

Petrović Nevena¹

Ivaniš Miloš²

Soleša Dimitrije³

Sažetak: Razvoj matematičke osnove metoda za projektovanje modela u različitim oblastima nauke i tehnike danas je veoma intenzivan i interdisciplinaran. Sa aspekta kvantitativnih metoda optimizacije, od najveće važnosti su matematički modeli procesa, koji se u opštem slučaju mogu prikazati u formi linearnih algebarskih jednačina ili ekvivalentnim prikazima. U postupku definisanja pretpostavki i usvajanja modela procesa vrši se formulacija problema, što se odnosi na određivanje nivoa dekomponovanja problema i nivoa detalja u kojima će problem biti rešavan. Postupak određivanja matematičkog modela, na bazi modela procesa, podrazumeva konstruisanje konkretnog modela koji daje relacije između promenljivih kojima se opisuje proces, kao i kriterijum efektivnosti rešenja. Oblast operacionih istraživanja koja se bavi ovom vrstom modela jeste matematičko programiranje. Modeli matematičkog programiranja predstavljaju klasu optimizacionih modela, jer im je cilj iznalaženje optimalnih rešenja problema. Analogno tome, osnovno obeležje današnje moderne ekonomije jeste prodor matematičkih metoda u suštinu svih ekonomskih

¹ Fakultet za ekonomiju i inženjerski menadžment, Cvečarska 2, 21000 Novi Sad, e-mail: petrovicnevena97@gmail.com

² Fakultet za ekonomiju i inženjerski menadžment, Cvečarska 2, 21000 Novi Sad, e-mail: mivanis97@gmail.com

³ Fakultet za ekonomiju i inženjerski menadžment, Cvečarska 2, 21000 Novi Sad, e-mail: dimitrijsolesa@gmail.com

istraživanja. U tom kontekstu, osnovni cilj ovog rada jeste da ukaže na rastući značaj primene matematičkih tehnika, metoda i modela u ekonomiji kao nauci, jer njihovom pravilnom primenom u ekonomiji, mogu se smanjiti mnoge nejasnoće u ekonomskoj teoriji i praksi.

Ključne reči: matematika / metodi / modeli / sistem / optimalnost.

UVOD

Cilj svakog istraživanja, odnosno naučne spoznaje stvarnosti nosi u sebi želju da se utvrde zakonomernosti i nepobitne, naučno verifikovane istine svojstvene razmatranom objektu, procesu i pojavi. Pri tome, sasvim je jasno da početnu etapu predstavljaju rezultati posmatranja i merenja koji čine polaznu tačku u projektovanju modela koji u osnovi treba da u skladu sa našim interesovanjima sveobuhvatno iskaže informacije o procesu i objektu, sadržane u rezultatima posmatranja (opservacije). Svaki rezultat posmatranja ima manje ili više slučajan karakter, što opredeljuje da se projektovanje verodostojnog modela realnog procesa – objekta može ostvariti višestrukim posmatranjem. Slučajnost posmatranja uslovljena je i određena činjenicom da je nemoguće potpuno obuhvatiti mnogobrojne uzročno-posledično spregnute uticaje koji deluju na posmatrani proces – objekat i utvrditi stepen njihovog međusobnog delovanja. Zbog izuzetne složenosti u istraživanju realnih fizičkih sistema, procesa i objekata, postoji realna potreba da predviđanja budu preneti na neki drugi teren, gde bi ispitivanja bila lišena većine problema koji prate realne procese. Taj teren je model sistema – procesa, objekta.

KONCEPT MODELA

Formalizacija zakona funkcionisanja ili projektovanje modela procesa predstavlja jedan od najvažnijih zadataka kvantitativnih metoda optimizacije i njihove teorije i prakse. Na osnovu modela moguće je projektovati upravljačku strukturu sistema, proces donošenja odluka, sintetizovati odgovarajući zakon upravljanja i izvršiti izbor tehničkih sredstava za fizičku realizaciju sistema (Debeljković, Simeunović, Mulić, 2006, str. 3). Takođe, model može biti neophodan za određivanje suštinske osobine procesa – objekta i potiskivanja u drugi plan manje

važnih sekundarnih karakteristika. Isto tako, model ima poseban značaj ne samo u čuvanju informacija o procesu – objektu, već i u njihovom daljem prenošenju i korišćenju. Poznato je da apstraktni modeli, koji formalizuju rezultate posmatranja, imaju nesumnjive prednosti u odnosu na modele koji kao svoja izražajna sredstva prvenstveno koriste govorni jezik, crteže i sl. Pod apstraktnim modelom podrazumeva se pojednostavljeni sažetak esencijalnih elemenata situacije koji nam omogućava da date elemente analiziramo na logičan način (Frank, Bernanke, Antonovics, Heffetz, 2022, str. 5). U kontekstu navedenog, uloga modela u prirodnim, društvenim i tehničkim naukama ima poseban značaj. Oslanjajući se na rezultate posmatranja i saznanja, naučnici projektuju model koji odgovara posmatranoj pojavi i njegovim rešavanjem upoređuju, potvrđuju ili opovrgavaju teorijske rezultate.

Pod definicijom pojma model – treba podrazumevati suštinski opis realnog procesa-objekta koji u njemu u pogodnoj formi iskazuje svu neophodnu informaciju (Debeljković, Simeunović, Mulić, 2006, str. 3). Prihvatajući ovu definiciju može se konstatovati da model ne mora potpuno da odražava stvarno stanje procesa – objekta. Dovoljno je da ga on suštinski „imitira” ili „podržava” njegovo ponašanje. U tom kontekstu, matematički modeli se mogu posmatrati kao idealizacija stvarnosti ili nekog procesa (Dražić, 2017, str. 2). Pri tome, odabir promenljivih koje su bitne za model i onih koje se smatraju nebitne pa se zanemaruju, kao i izabrani oblik zavisnosti između promenljivih ima za posledicu da se model ne poklapa sa stvarnošću (Dražić, 2017, str. 3). U tom pravcu, onda se generalizuje stav da model treba da predstavlja kompromis prikaza realne stvarnosti i njegove ciljno usmerene upotrebne vrednosti. Izuzetno, složeni modeli obično imaju samo akademsku vrednost pa se, po pravilu, znatno uprošćavaju sve do stepena kada se može efikasno iskoristiti savremeni matematički aparat koji će dati primenljivo rešenje.

Razvoj matematičke osnove metoda za projektovanje modela u različitim oblastima nauke i tehnike intenzivan je i interdisciplinaran. Sva složenost ovog pitanja uslovljava da ne postoji njihova jedinstvena naučna klasifikacija. U tom kontekstu, modele je moguće svrstati u dve osnovne klase, to su: (1) simbolički (apstraktni) modeli, i (2) realni (materijalni, fizički) modeli. Klasu simboličkih modela predstavljaju i matematički modeli koji su predmet našeg interesovanja u ovom radu. Kao takvi, matematički modeli danas nesumnjivo dominiraju u naučnim istraživanjima u brojnim oblastima. Oni kao informacioni modeli danas

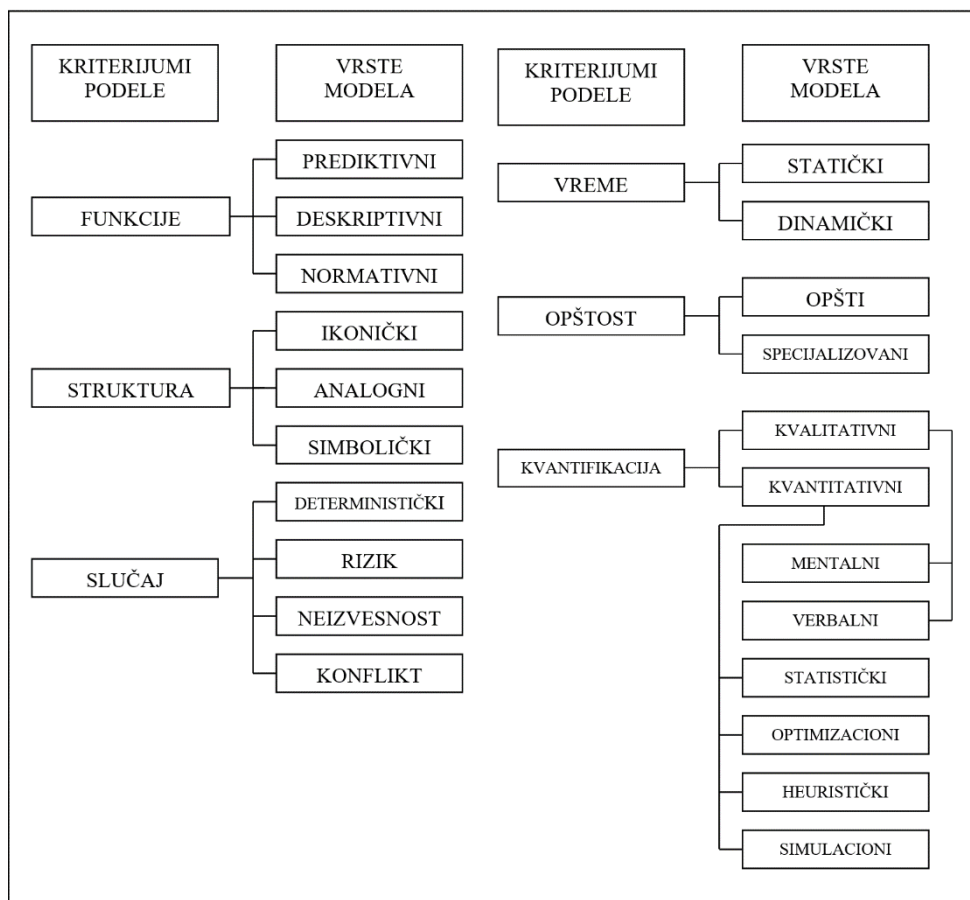
predstavljaju u većini slučajeva, najprikladniju formu podržavanja ponašanja procesa – objekta sa potencijalnim mogućnostima iznalaženja njihove verodostojnosti i upotrebne vrednosti. Pri tome, sa aspekta kvantitativnih metoda optimizacije, od prevashodne važnosti su matematički modeli procesa, koji se u opštem slučaju mogu prikazati u formi linearnih algebarskih jednačina ili ekvivalentnim prikazima. Shodno tome, treba pomenuti da je mnoge fundamentalne ideje u ekonomiji moguće prikazati u vidu jednostavnog linearnog oblika određene funkcije (Roy, 2020, str. 83).

Generalno gledano, za konkretnu formu traženog matematičkog modela veliki značaj ima odabrana kontrolna granica između mogućeg i usvojenog broja pretpostavki. Ovaj uslov je važan kako definisani matematički opis ne bi, s jedne strane, doveo u pitanje verodostojnost opisa fizičkog procesa, a s druge strane, da ne bi dao veoma složen sistem jednačina čije rešavanje ne bi bilo funkcionalno. Inače, polazeći od osnovnih karakteristika modela, koje su bitne za samu postavku modela, u široj literaturi koja tretira ovu problematiku, moguća je klasifikacija modela po veoma različitim kriterijumima, kako je to prikazano na slici 1.

Kao što se sa slike 1. vidi, modeli su kategorizovani po veoma različitim kriterijumima, i to: po kriterijumu funkcije, strukture, slučaja, vremena, opštosti i kvantifikacije. *Sa aspekta funkcije*, modeli se dele na deskriptivne, prediktivne i normativne modele. *Deskriptivni* modeli opisuju stanje sistema, *prediktivni modeli* analiziraju posledice različitih strategija upravljanja, dok *normativni modeli* daju informacije kako upravljati sistemom, što nameće zaključak da su svi *optimizacioni modeli* normativni. *Sa aspekta strukture*, modeli se dele na ikoničke, analogne i simboličke modele. *Ikonički modeli* predstavljaju sliku sistema, *analogni modeli* predstavljaju osobine jednog fizičkog sistema analogijom u odnosu na drugi sistem, dok su *simbolički modeli* matematički modeli. *Sa aspekta slučajnosti*, modeli se dele na determinističke, modele rizika, modele neizvesnosti i konfliktne modele. *Determinističke modele* karakteriše potpuna determinisanost tj. određenost procesa, u *modelu rizika* stanja se mogu opisivati verovatnoćama, *modele neizvesnosti* karakteriše nepoznavanje stanja i odgovarajućih raspodela verovatnoća, dok kod *konfliktnih modela* stanja okoline su kontrolisana od strane drugog igrača. *Sa aspekta vremenske zavisnosti*, modeli se dele na statičke i dinamičke modele. Kod *statičkih modela* promenljive i relacije se ne menjaju sa

vremenom, dok *dinamički modeli* odslikavaju zavisnost od vremena trajanja procesa. *Sa aspekta opštosti*, modeli se dele na opšte i specijalizovane modele. *Opšti modeli* su primenjivi na različite situacije dok su *specijalizovani modeli* usmereni na rešavanje pojedinačnih problema. *Sa aspekta stepena kvantifikacije*, modeli se dele na kvalitativne i kvantitativne modele. *Kvalitativni modeli* se primenjuju na sisteme gde nije moguće merenje karakterističnih veličina, dok se *kvantitativni modeli* primenjuju u sistemima gde je moguće meriti sve atribute procesa sistema koji se modelira.

Slika 1. Klasifikacija modela prema njihovim osnovnim karakteristikama



Izvor: Obrada autora

KONSTRUKCIJA MATEMATIČKOG MODELA

Algoritam projektovanja matematičkih modela baziran je na opštosti naučnih metoda i ima primarni značaj u operacionim istraživanjima – optimizaciji kvantitativnim metodama. U okviru analize stvarnog procesa vrši se definicija, cilj i planiranje istraživanja, što podrazumeva da se utvrdi jasan problem koji donosilac odluke želi da reši putem modela. Da bi se zadatak modeliranja sproveo neophodno je dobro planiranje kadrovskih, vremenskih i troškovnih resursa. U postupku definisanja pretpostavki i usvajanja modela procesa vrši se formulacija problema, što podrazumeva određivanje nivoa dekomponovanja problema i nivoa detalja u kojima će problem biti rešavan. Postupak određivanja matematičkog modela procesa, podrazumeva formiranje tj. konstruisanje konkretnog modela koji daje relacije između promenljivih kojima se opisuje proces kao i kriterijum efektivnosti rešenja. Oblast operacionih istraživanja koja se bavi ovom vrstom modela naziva se matematičko programiranje. Model matematičkog programiranja obuhvata tri osnovna problema (Krčevinac, Čangalović, Kovačević Vujčić, Martić, Vujošević, 2006, str. 12). Te probleme čini sledeće: (1) linearno programiranje, (2) nelinearno programiranje, i (3) celobrojno programiranje. *Linearno programiranje* sa aspekta matematike najčešće podrazumeva traženje optimuma (minimuma ili maksimuma) linearne funkcije sa n varijabli X_i povezanih linearnim odnosima (jednačinama ili nejednačinama) koja se nazivaju ograničenja (Radojević, 2002, str. 153). Linearni program je optimizacioni problem gde je funkcija cilja linearna u pogledu nepoznatih promenljivih, a ograničenja se sastoje od linearnih jednačina i nejednačina (Luenberger, 2021, str. 13). *Nelinearno programiranje* je proces rešavanja optimizacionog problema gde su neka od ograničenja nelinearna. *Celobrojno programiranje* podrazumeva matematičku optimizaciju gde su neke promenljive ograničene tako da budu celobrojne. Termin se obično odnosi na celobrojno linearno programiranje (CLP). Postupak određivanja i verifikacije matematičkog modela procesa – objekta šematski se može predstaviti kao što to ilustruje slika 2.

Slika 2. *Postupak određivanja i verifikacije matematičkog modela*

Izvor: Obrada autora

Modeli matematičkog programiranja predstavljaju klasu optimizacionih modela, jer im je cilj iznalaženje optimalnih rešenja problema. Analiza matematičkog modela i zaključci obuhvataju izbor metoda rešavanja modela izborom odgovarajuće alternative u odnosu na traganje za optimalnim rešenjem pojednostavljene verzije problema ili za približnim rešenjem složenije i tačnije formulacije problema, programiranje i testiranje, kao i prikupljanje podataka za praktičnu primenu modela u fazi implementacije (Antony, Biggs, 2016).

Provera zaključaka modela podrazumeva validnost modela i to kroz proveru slaganja rezultata modela sa realnim sistemom, što podrazumeva i proveru konzistentnosti, osetljivosti i primenljivosti modela. Ukoliko model i njegovo rešenje opisuje ili predviđa stvarnost u prihvatljivoj meri, onda se model može smatrati zadovoljavajućim (Dražić, 2017, str. 3). Ako su dobijeni rezultati pokazali dobro slaganje, onda se prelazi u fazu implementacije. Međutim, ako se rezultati modela ne slažu sa realnim sistemom, onda se postupak vraća u fazu usvajanja modela procesa ili fazu formiranja matematičkog modela. Finalna ili konačna faza modeliranja, predstavlja uvođenje modela u praktičnu primenu, što će opredeliti konačan uspeh verodostojnosti i kvaliteta modela.

MATEMATIČKI MODELI U EKONOMIJI

Posebno značajno obeležje moderne ekonomije jeste prodor matematičkih i empirijskih metoda u suštinu ekonomskih istraživanja. S obzirom na evoluciju matematičke ekonomije, danas je skoro nemoguće čitati i pratiti ekonomska istraživanja bez poznavanja matematičkih tehnika. Takođe, u ekonomskoj profesiji postoje mišljenja koja analiziraju odnos troškova i koristi, ujedno postavljajući pitanje opravdanosti primene matematičko-empirijskih metoda. Međutim, u dužem periodu testiranje ekonomske teorije prate matematičke tehnike koje su dokazale smisao i opravdanost ovakvog pristupa u ekonomskoj nauci.

Deduktivna rasuđivanja, koja su u svom naučnom radu u oblasti ekonomije primenjivali Adam Smit i David Rikardo, mogu se na neki način shvatiti i kao poziv i ujedno svojevrstan podsticaj mnogim ekonomskim teoretičarima da upotrebljavaju matematiku u svojim naučnim istraživanjima. Međutim, prema mišljenjima mnogih ekonomista, stvarni utemeljivač matematike u ekonomiji bio je francuski matematičar i ekonomista Augustin Kurno (Augustin Cournot), koji je dao prihvatljivo razumevanje uloge i prednosti korišćenja matematike u ekonomiji. Naime, on je ukazao da se matematička analiza koristi za nalaženje odnosa između veličina koje se ne mogu izraziti brojkama i između funkcija čiji se zakon ne može iskazati algebarski.

Generalno gledano, literalna, grafička i matematička deskripcija ekonomske teorije se podudaraju i nemaju nekih suštinski bitnih razlika. Opravdanost primene se odnosi na troškove i koristi primene navedenih oblika izražavanja. U tom kontekstu, prednost primene matematike se jasno i potpuno odslikavaju u ekonomskoj analizi složenih višedimenzionalnih problema, koje literalni i grafički prikazi ne mogu dovoljno jasno opisati, imajući u vidu složenost odnosa među tim pojavama. Primarne koristi primene matematičkih metoda u ekonomiji ogledaju se u sledećim prednostima: (1) Matematika čini pretpostavke i premise eksplicitnim, čime sprečava moguće predrasude teorije; (2) Matematika obezbeđuje da izlaganje ekonomske teorije bude koncizno i precizno; (3) Matematika daje mogućnost potpunijeg izučavanja i lakšeg razumevanja problema sa više od dve dimenzije; (4) Matematika služi kao pomoćno sredstvo deduktivnog zaključivanja u ekonomiji čime se obezbeđuje pouzdanije zaključivanje ako su pretpostavke istraživanja

složene i brojne, pa se usled toga identifikacija zakona i kategorija ne može izvesti bez aksiomatizacije i formalizacije.

Posle aritmetike, u dužem periodu, najkorisniji matematički aparat među ekonomistima bio je diferencijalni račun. Budući da se ova oblast matematike bavi promenama, otuda po logici stvari, ona je pomogla ekonomistima u razmatranju ekonomskih teorija, posebno kvantitativnih pitanja kao što je npr. pitanje ravnotežne cene i količine u odnosu na tražnju.

U ekonomskim pitanjima osim ukupnih količina, kao posebno značajno pitanje ističe se i poznavanje ekstremnih – graničnih količina, što otvara prostor primeni matematičke analize. U savremenom poslovnom upravljanju u preduzeću, izuzetno je važno da menadžeri, posebno top menadžeri poznaju granične troškove i granični prihod u funkciji promena drugih parametara poslovanja, kako bi menadžerske odluke bile u zoni optimalnih. Ovo polje delatnosti veoma dobro rešava *diferencijalni račun* koji je omogućio da se mnoge pojave i procesi u ekonomiji matematički modeliraju u vidu diferencijalnih jednačina (Đorđević, 2007, str. 325).

Matematički postupak koji daje deskripciju rešenja problema potrošača, koji odlučuju između skupa cena i ograničenog svog dohotka, a teže maksimiziranju koristi od proizvoda koji kupuju, naziva se *ograničeno optimiziranje* i u osnovi predstavlja primenu diferencijalnog računa (Ekelund, Herbert, 1997, str. 586).

U kontekstu navedenog, treba pomenuti i shvatanje ekonomskog teoretičara Kurnoa (Antuan Kurno) koji u svojoj teoriji oligopola (1838.) daje primer teorije maksimiziranja profita (Đedović, Nadoveza, 2008, str. 18). On smatra da preduzeća biraju količinu proizvoda koje će pustiti na tržište u cilju maksimiziranja profita. Mere promene prihoda preduzeća i njegovih troškova treba da budu jednake, što upućuje na potrebu iznalaženja graničnih prihoda i graničnih troškova uzimanjem prvog izvoda funkcije ukupnih prihoda i funkcije ukupnih troškova, što je još jedan primer primene diferencijalnog računa.

U kontekstu do sada rečenog, neophodno je reći da je u ekonomskim problemima kao matematički aparat veoma široku primenu našao i *integralni račun* koji je izuzetno značajan u primeni matematičke analize u ekonomiji. Primera radi, maksimalnom cenom koju bi platili za proizvod ili uslugu, potrošači dobijaju korist čija je mera u matematičkom smislu integral, koji u stvari predstavlja korist svih pojedinaca ispod krive tražnje

za određenim proizvodom – uslugom. Procenom krive tražnje i izračunavanjem troškova proizvodnje – usluge, integralnim računom se dobija potpuna kalkulacija i tako se obezbeđuje optimalna poslovna odluka.

U daljem razmatranju prethodne problematike, pomenućemo i matematičko polje koje je poznato kao *matrična algebra*. Ona daje široke mogućnosti matematičke analize za probleme koji su opisani velikim brojem jednačina i promenljivih. Kombinovanjem linearne i matrične algebre ekonomisti dobijaju matematički aparat, metode i modele koji opisuju odnose proizvodnje i potrošnje u linearnom području ili ih aproksimacijama svode na linearne (Šekarić, Kovačević, 2007).

Imajući u vidu različite matematičke metode u ekonomiji moglo bi se reći da se sve one mogu diferencirati na dve velike grupe: *prvo*, klasične metode optimizacije, i *drugo*, neklasične metode optimizacije. Klasične metode optimizacije se temelje na diferencijalnom i integralnom računu, dok su neklasične metode optimizacije poznate kao matematičko programiranje. Osnovna razlika u ovim metodama zasniva se u činjenici da u metodama matematičkog programiranja optimizator nailazi na ograničenja u obliku nejednačina. Novi strukturni oblik optimizacije liberalizuje ograničenja i problem čini realističnijim. Tako su nametnute i nove metode za rešavanje problema jer se za rešavanje ograničenja u obliku nejednačina ne mogu upotrebiti metode diferencijalnog i integralnog računa.

Promeni stila ekonomske analize od pretežno verbalno-grafičkog izlaganja do sistemske i detaljne matematičke deskripcije posebno je doprineo američki ekonomista, dobitnik Nobelove nagrade 1970. godine, Pol Samuelson (Samuelson, 1969). On je matematiku primenio na opštu ekonomsku teoriju, uključujući teoriju potrošačkog ponašanja, teoriju rasta i kapitala kao i teoriju međunarodne trgovine (Samuelson, Nordhaus, 2009).

Primenu matematičkih metoda i modela na ekonomske podatke u cilju verifikacije, ali i poboljšanja ekonomske teorije, daje još jedno područje savremene ekonomije pod nazivom *ekonometrija*. Cilj ove naučne discipline jeste da u okviru teorijskih razmatranja kombinacijom ekonomske teorije i ekonomskih podataka pomoću kvantitativnih metoda objasni i predvidi ekonomska ponašanja (Dougherty, 2016). Osnovni

zadatak ekonometrije jeste utvrđivanje zavisnosti promenljivih u datoj ekonomskoj relaciji, odnosno modeliranje ekonomskih veličina primenom matematičko-statističkih metoda (Mladenović, Petrović, 2020, str, 14).

Na osnovu svega prethodno navedenog, mogli bismo reći da u savremeno doba *de facto* nema područja moderne mikroekonomske ili makroekonomske teorije koje nije ostalo bez primene matematičkih metoda. Matematički aparat u ekonometrijskim razmatranjima je prožeo posebno mikroekonomska područja rada, javnih finansija, antimonopolske aktivnosti i različite oblasti državnog regulisanja, gde se primenjuju matematičko-statističke metode i modeli, ekonometrija, operaciona istraživanja, informatika i sl.

Kao glavni argument za dalju *matematizaciju* ekonomije kao nauke ističe se tvrdnja da ta disciplina ne može postati istinski naučna, sve dok ne dostigne strogost, tačnost i potpunost prirodnih nauka, odnosno sve dok njene hipoteze ne budu testirane i dokazane. Pri tome, obično se ističe teza da je teorija bez verifikacije ograničene upotrebe, dok bez teorije oblikovanje logikom matematike, činjenice u stvari ostaju bez smisla. Međutim, postoje i drugačija mišljenja kritičara, koji smatraju da su neadekvatna teorija i loši podaci dovoljan razlog ograničene primene kvantitativnih metoda u ekonomiji. S tim u vezi, brojni kritičari ističu da matematika i proučavanja u rukama onih koji su opremljeni oruđima, ali ne i idejama, mogu udaljiti ekonomiste od istina vezanih za tržišta i tržišno funkcionisanje. Takođe, oni su mišljenja da matematika odvlači pažnju od temeljnih istina o ekonomskim procesima.

Ali bez obzira na pomenuta različita mišljenja, ipak je činjenica da razumevanje krajnjih dometa matematičkih tehnika doprinosi shvatanju njihovog potpuno ispravnog i korisnog mesta u ekonomskoj nauci. Sa svoje strane, po logici stvari, to implicira naš zaključak da matematičke metode pravilnom primenom u ekonomiji, mogu smanjiti mnoge nejasnoće, odnosno podići ili smanjiti poverenje u nove i stare ekonomske ideje.

OPTIMIZACIJA U PROCESU DONOŠENJA ODLUKA

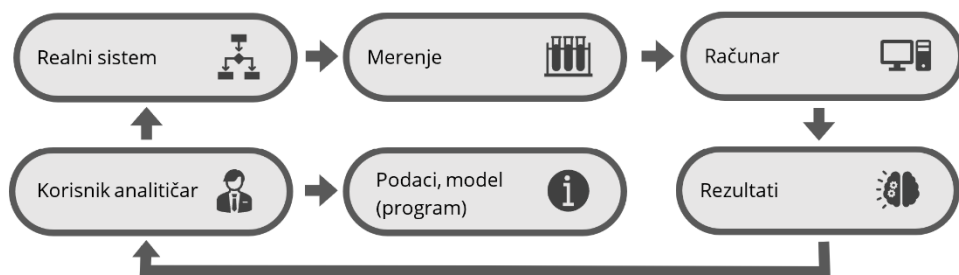
U procesu donošenja odluka, uvažavajući stavove o naučnom i sistemskom pristupu u odlučivanju, matematički modeli i optimizacione metode imaju primarnu, a u nekim slučajevima i nezamenljivu ulogu. Analogno tome, u

ovoj tački izlaganja ćemo ukratko ukazati samo na osnovne pojmove, značaj i vezu matematičkog modela i zadatka optimizacije.

Matematički model je samo jedna od mogućih aproksimacija realnog sistema. Pri tome, zadatak modela je da pomaže istraživaču, a ne da ga zameni, niti da ga oslobodi u donošenju odluka. Model ne može da proizvodi nove informacije o sistemu ali zato daje mogućnost da se potpunije shvati sistem i njegovo ponašanje.

Generalno gledano, *optimizacija* predstavlja izbor najbolje varijante ili najpovoljnijeg rešenja iz više mogućih varijanti u odnosu na usvojeni kriterijum. U matematičkom smislu, optimizacija predstavlja iznalaženje ekstrema kriterijumske funkcije (funkcije cilja). Analogno tome, mnogi ekonomsko-matematički modeli su zasnovani na maksimiziranju određene funkcije cilja u odnosu na data ograničenja (Perloff, 2020, str. 30). Optimizacija se vrši primenom različitih metoda u zavisnosti od tipa relacija u matematičkom modelu, funkcije cilja i ograničenja. Pri tome, izbor linearnih i nelinearnih funkcija za funkciju cilja i njenih ograničenja treba da eksplicitno sledi iz prirode faktora situacije i datih opservacija (Dunbar, 2019, str. 2). Za rešavanje modela koriste se programski paketi – softveri prema algoritmu koji ilustrativno i uprošćeno prikazuje slika 3.

Slika 3. Šematski prikaz primene računara u rešavanju modela



Izvor: Obrada autora

Prilikom realizacije zadatka optimizacije iskustveno se preporučuje primena određenih pravila koja se najčešće ogledaju u sledećem:

- (1) Zadatak početi sa jednostavnim modelom, a kada se potpunije izuči problem, onda proširiti model novim promenljivima;
- (2) Razvijati model za samo jednu specijalizovanu vrstu problema;
- (3) U fazi pripreme modela saznati odgovore da li je model tehnički moguć, ekonomski vredan i da li će organizaciono biti prihvaćen;
- (4) Uključiti korisnika u razvoj modela;
- (5) Paralelno prikupljati i modelirati podatke i formirati dokumentaciju;
- (6) Model tokom razvoja i primene usavršavati.

Široka primena i kvalitetni rezultati daju značaj metodama optimizacije u rešavanju niza realnih problema, što okuplja veliki broj naučnih radnika u zajedničkom nastojanju da se razvijaju odgovarajući opšti ili konkretni matematički modeli i metode optimizacije njihovog rešavanja (Zečević, Drašković, 2001). Određivanje optimalnog rešenja jednokriterijumskog modela vrši se u skladu sa prirodom funkcije cilja (maksimizacija ili minimizacija), prirodom relacija u funkciji cilja i ograničenjima (linearne ili nelinearne) i prirodi nepoznatih (slobodne nenegativne vrednosti). S tim u vezi, linearno programiranje je široko korišćena matematička tehnika, formulisana da pomogne operativnim menadžerima u planiranju i donošenju odluka neophodnih za raspoređivanje resursa (Hejzer, Render, 2011, str. 766).

Primena metoda optimizacije u procesu odlučivanja u savremenim uslovima poslovanja i potreba brzog donošenja kvalitetnih odluka sve više postaje komparativna prednost i bitan uslov opstanka na tržištu, a u pojedinim slučajevima i jedini način da se složeni projekti celovito izuče i racionalno, sa aspekta tehničkih uslova, resursa, vremena, kadrova i troškova dovedu do kraja. U celini gledano, zadatak optimizacije jeste da kroz analitiku procesa upravljanja omogući da sistem kojim se upravlja ostvari željeno – ciljno (zadato) ponašanje.

U uslovima današnjih tehnoloških dostignuća, informacionih tehnologija i informacionih sistema, veoma složeni modeli i analize procesa i sistema postaju pojednostavljeni, brzo rešivi, a problemi u odnosu na usvojeni kriterijum optimalno rešeni. U tom kontekstu, razumevanje samih naučnih principa metoda optimizacije u oblasti operacionih istraživanja i kvantitativnih metoda ima primarni značaj. Upravo sa pomenutih aspekata, metode optimizacije imaju i imaće i dalje sve veći značaj za

efikasno upravljanje operacijama složenih organizacionih sistema u privredi, javnim službama, državnoj upravi, vojsci, kao i širokim spektrom brojnih ljudskih delatnosti.

ZAKLJUČAK

Nikada ranije nije se toliko isticalo da je matematika danas prisutna u svim segmentima ljudske delatnosti. Konsekventno tome, ističe se i činjenica da se ni pojedinci ni društvo u budućnosti neće moći održati ako ne budu matematički pismeni. U tom kontekstu, posebno je izražena vidna tendencija primene matematičkih tehnika, metoda i modela u ekonomskoj nauci. Kao glavni argument za dalju *matematizaciju* ekonomije kao nauke ističe se tvrdnja da ekonomija kao disciplina ne može postati istinski naučna, sve dok ne dostigne strogost, tačnost i potpunost prirodnih nauka, odnosno sve dok njene hipoteze ne budu testirane i dokazane.

Generalno gledano, literalna, grafička i matematička deskripcija ekonomske teorije se podudaraju i nemaju nekih suštinski bitnih razlika. Međutim, prednost primene matematike jasno i potpuno se oslikava u ekonomskoj analizi složenih višedimenzionalnih problema, koje literalni i grafički prikazi ne mogu dovoljno jasno opisati, imajući u vidu složenost odnosa među tim pojavama. U tom kontekstu, primarne koristi primene matematičkih metoda u ekonomiji ogledaju se u sledećim prednostima: *prvo*, matematika čini pretpostavke i premise eksplicitnim, čime sprečava moguće predrasude teorije; *drugo*, matematika obezbeđuje da izlaganje ekonomske teorije bude koncizno i precizno, i *treće*, matematika daje mogućnost potpunijeg izučavanja ali takođe i lakšeg razumevanja problema sa više od dve dimenzije.

Algoritam projektovanja matematičkih modela baziran je na opštosti naučnih metoda i ima primarni značaj u operacionim istraživanjima – optimizaciji kvantitativnim metodama. U oblasti ekonomije prisutan je problem optimizacije koji predstavlja nalaženje maksimuma i minimuma neke funkcije ili dve ili više promenljivih pri određenim ograničenjima. Funkcija čija se maksimalna ili minimalna vrednost traži naziva se funkcijom cilja, dok se ograničenja prikazuju u vidu jednačina ili nejednačina. U okviru analize stvarnog procesa vrši se definicija cilja i planiranje istraživanja, što podrazumeva da se utvrdi jasan problem koji

donosilac odluke želi da reši putem modela. Posle toga, problem se eksplicitno formuliše kao funkcija ciljeva istraživanja, uloge učesnika u istraživanju, ograničenja problema i obuhvaćenih varijabli. Dalji korak je konstrukcija modela bazirana na formulisanom problemu. Model je kvantitativne prirode i njegovo rešavanje se obavlja određenim algoritmom koji predstavlja skup procedura kojima se, korak po korak, dolazi do optimalnog rešenja za dati model. U kontekstu rečenog, treba istaći činjenicu da je savremena ekspanzija informacione tehnologije direktno uticala na intenzivan razvoj matematičkih metoda i modela primenjivih u ekonomiji. Razlog tome je, što su ekonomska istraživanja ponekad zasnovana na obimnim i kompleksnim izračunavanjima, teško izvodljivim bez kompjutera i odgovarajućih softvera. Otuda, stvarnost danas zahteva ne samo određenu matematičku već i kompjutersku pismenost svih pojedinaca, posebno onih koji su zaposleni u privredi, javnim službama i državnoj upravi.

LITERATURA

1. Antony, M., Biggs, N. (2016). *Matematics for Economics and Finance – Method and Modelling*, Cambridge, United Kingdom, Cambridge University Press.
2. Debeljković, LJ., Simeunović, G., Mulić, V. (2006). *Matematički modeli objekata i procesa u sistemima automatskog upravljanja*, Beograd, Mašinski fakultet.
3. Dougherty, C. (2016). *Introduction to Econometrics*, Oxford, United Kingdom, London School of Economics and Political Science and Oxford University Press.
4. Dražić, M. (2017). *Matematičko modeliranje*, Beograd, Matematički fakultet.
5. Dunbar, S. (2019). *Mathematical Modeling in Economics and Finance: Probability, Stochastic Processes and Differential Equations*, Providence, United States of America, American Mathematical Society.
6. Ekelund, B.R., Herbert, F.R. (1997). *A History of Economic Theory and Method*, New York, USA, McGraw-Hill.
7. Đedović, B., Nadoveza, B. (2008). *Kvantitativne metode u menadžmentu*, Beograd, Fakultet za menadžment malih i srednjih preduzeća.
8. Đorđević, Z. (2007). *Matematika za ekonomiste*, Beograd, Fineks.

9. Frank, R., Bernanke, B., Antonovics, K., Heffetz, O. (2022). *Principles of Economics*, New York, United States of America, McGraw Hill.
10. Hejzer, DŽ., Render, B. (2011). *Operacioni menadžment*, Beograd, Ekonomski fakultet.
11. Krčevinac, S., Čangalović, M., Kovačević-Vujić, V., Martić, M., Vujošević, M. (2006). *Operaciona istraživanja*, Beograd, Fakultet organizacionih nauka.
12. Luenberger, D., Ye, Y. (2021). *Linear and Nonlinear Programming*, Stanford, United States of America, Springer Nature.
13. Mladenović, Z., Petrović, P. (2020). *Uvod u ekonometriju*, Beograd, Ekonomski fakultet.
14. Perloff, J. (2020). *Microeconomics: Theory and Applications with Calculus*, London, United Kingdom, Pearson Education.
15. Radojević, Z. (2002). *Operativni menadžment*, Beograd, Grafoslog.
16. Roy, S. (2020). *A First Course in Mathematical Economics*, Cambridge, United Kingdom, Cambridge Scholars Publishing.
17. Samuelson, A.P., (1969). *Ekonomija – uvodna analiza*, Beograd, Savremena administracija.
18. Samuelson, A.P., Nordaus, D.V. (2009). *Ekonomija*, Zagreb, Mate doo.
19. Šekarić, M., Kovačević, I. (2007). *Kvantitativne metode za menadžment*, Beograd, Fakultet za finansijski menadžment i osiguranje, Univerzitet Singidunum.
20. Zečević, T., Drašković, M. (2001). *Kvantitativni modeli optimizacije*, Beograd, Evropski univerzitet za internacionalni menadžment i biznis.

APPLICATION OF MATHEMATICAL METHODS AND MODELS IN ECONOMICS

Nevena Petrović

Miloš Ivaniš

Dimitrije Soleša

Abstract: *The development of the mathematical basis of methods for model construction in various fields of science and technology today is very intensive and interdisciplinary. From the perspective of quantitative optimization methods, mathematical models of processes are of the utmost importance, whereby these can be generally represented in the form of linear algebraic equations or equivalent representations. Within the procedure of defining assumptions and adopting a process model, the problem formulation is conducted, whereby this refers to determining the level of problem decomposition and the level of detail in which the problem will be solved. The procedure of mathematical model determination, based on a process model, involves constructing a specific model that shows the relationships between the variables which describe the process, as well as the criterion of the solution effectiveness. The field of operations research that deals with this type of models is mathematical programming. Mathematical programming models represent a class of optimization models due to the fact that their goal is finding optimal solutions to problems. Analogously, the basic feature of today's modern economy is the penetration of mathematical methods into the essence of all economic research. In this context, the main aim of this paper is to point out the growing importance of the application of mathematical techniques, methods and models in economics as a science, as their proper application in economics can reduce many ambiguities in economic theory and practice.*

Key words: *mathematics, methods, models, system, optimality.*